



**КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ**



**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

3D моделирование физических процессов

Устойчивость разностных схем

**Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич**

Вопросы по предыдущей лекции:

- **Какие методы представления ДУ в конечных разностях вы знаете?**
- **Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{i,j,k}$$

- **Чему равно “b”?**
- **Чему равно “c”?**

Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем

$$L(f)=0 \quad (1) \quad f \text{ — точное решение ДУ } (1)$$

$$L_{\Delta}(f_{\Delta})=0 \quad (2) \quad f_{\Delta} \text{ — сеточная функция, или решение КРС } (2)$$

Ошибка аппроксимации (или невязка) КРС (2):

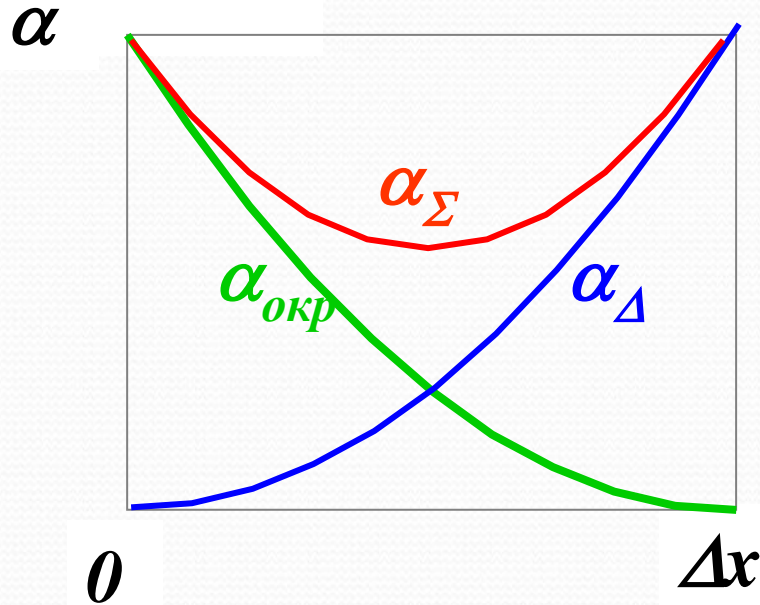
$$\alpha_{\Delta}=L_{\Delta}(f)$$

Схема называется **аппроксимирующей** на точном решении , если при $\Delta x \rightarrow 0$ $\alpha_{\Delta} \rightarrow 0$

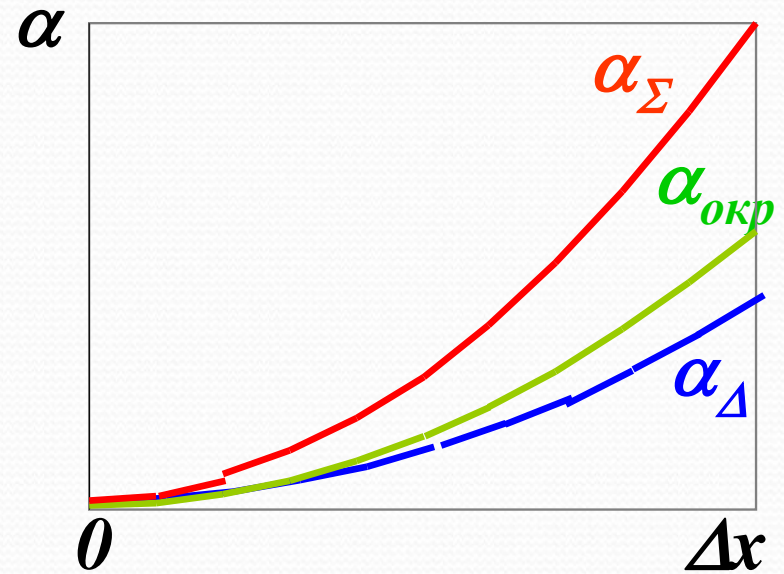
Условие сходимости:

при $\Delta x \rightarrow 0$

$f_{\Delta} \rightarrow f$



**Аппроксимирующая, но
несходящаяся КРС**



**Аппроксимирующая и
сходящаяся КРС**

**Чтобы из свойства аппроксимации следовала сходимость,
необходимо и достаточно, чтобы КРС была
устойчивой относительно малых возмущений**

Описание неустойчивости

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} \quad | \quad * \Delta t$$

$$f_i^{n+1} - f_i^n = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$$

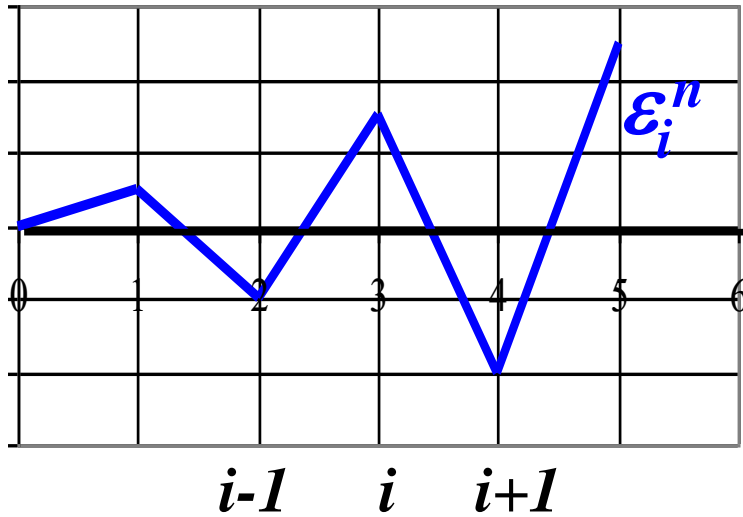
число Куранта
(3)

$$d = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

диффузионное
число
(4)

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (5)$$

Условие устойчивости КРС:



$$|\varepsilon_i^{n+1}| \leq |\varepsilon_i^n|$$

ИЛИ:

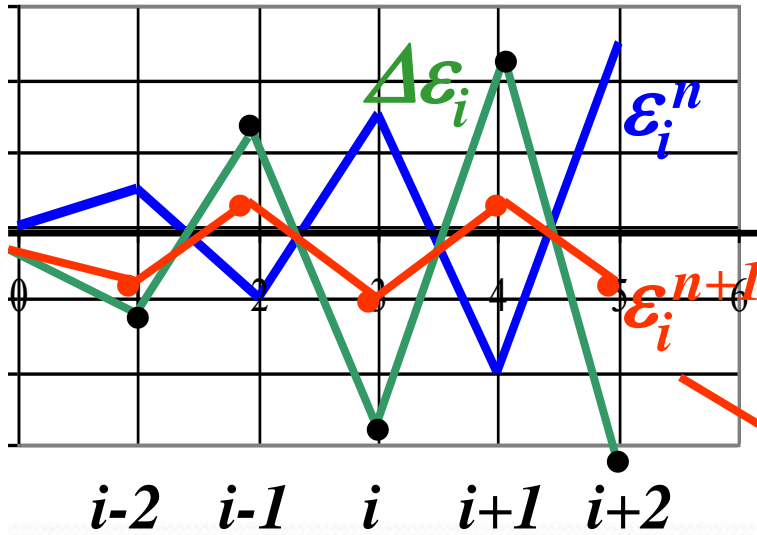
$$\frac{|\varepsilon_i^{n+1}|}{|\varepsilon_i^n|} \leq 1 \quad (6)$$

$$f_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = f_i^n + \varepsilon_i^n - \frac{C}{2} \left[(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) - (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) \right] + d \left[(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) + (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) - 2(f_i^n + \varepsilon_i^n) \right] \quad (7)$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (5)$$

(7)-(5):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d (\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n)$$



$$\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n$$

$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n) \quad (8)$$

C=0: $\Delta \varepsilon_i = d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n) < 0$



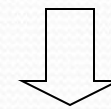
i-1: $\Delta \varepsilon_{i-1} = d(\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-2}^n - 2\varepsilon_{i-1}^n) > 0$



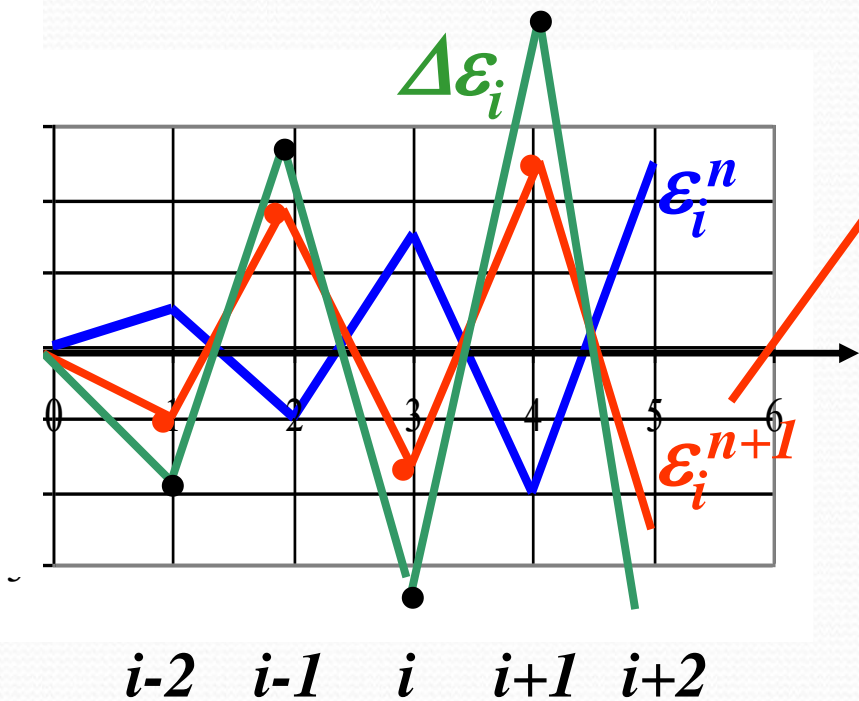
i+1: $\Delta \varepsilon_{i+1} = d(\varepsilon_{i+2}^n + \varepsilon_i^n - 2\varepsilon_{i+1}^n) > 0$

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \Delta \varepsilon_i$$

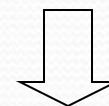
$$|\varepsilon_i^{n+1}| < |\varepsilon_i^n|$$



Устойчивая КРС

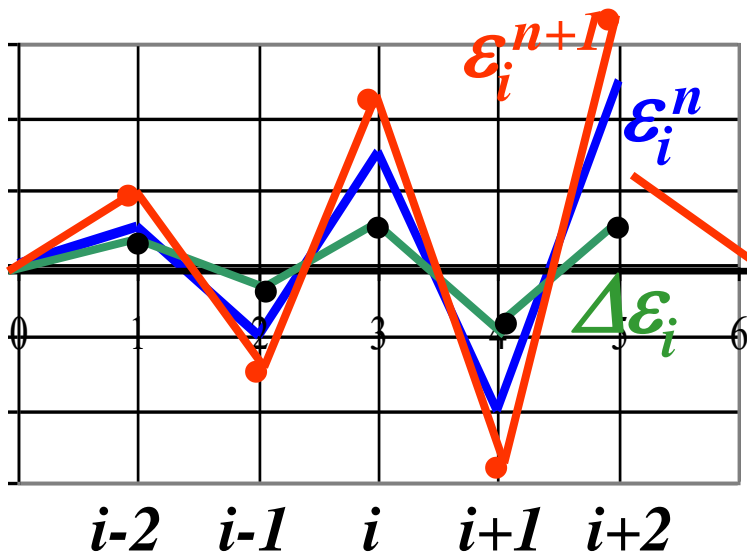


$$|\varepsilon_i^{n+1}| > |\varepsilon_i^n|$$



Неустойчивая КРС

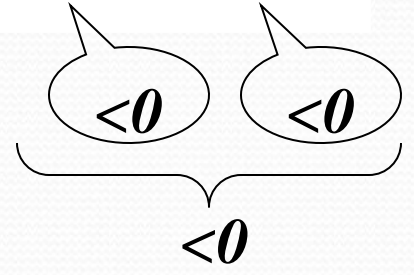
**Уравнение (5) при $C=0$
является
условно устойчивым.**



$$d=0$$

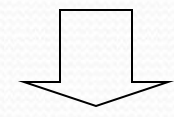
(8):

$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) > 0$$



$$i-1: \Delta \varepsilon_{i-1} = -\frac{C}{2} (\varepsilon_i^n - \varepsilon_{i-2}^n) < 0$$

$$|\varepsilon_i^{n+1}| > |\varepsilon_i^n|$$



$$i+1: \Delta \varepsilon_{i+1} = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+2}^n - \varepsilon_i^n) < 0$$

Неустойчивая КРС

Уравнение (5) при $d=0$ является **абсолютно неустойчивым.**